Ejercicios de Matemáticas I – Desigualdades

Desigualdades entre polinomios. Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.

Para ello lo que vamos a hacer es calcular las soluciones reales de la ecuación $p(x) = 0$, es decir, las *raíces* reales del polinomio $p(x)$. Esto solamente puede hacerse en casos sencillos. El más frecuente es cuando $p(x)$ es un polinomio con coeficientes que son números enteros y el coeficiente del término de mayor grado es igual a 1, porque entonces las raíces *enteras* de $p(x)$ deben ser divisores del término independiente.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica que $-6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5 > 0$.

Solución. Por lo antes dicho, las raíces *enteras* del polinomio

$$p(x) = -6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5$$

solamente pueden ser $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$. Tenemos que:

$$p(-6) < 0,\ p(-3) = -480,\ p(-2) = 0, p(-1) = 32,\ p(1) = 0,\ p(2) = 20,\ p(3) = 0,\ p(6) > 0.$$

Por tanto, -2, 1 y 3 son las únicas raíces *enteras* de $p(x)$. Dividiendo por Ruffini obtenemos que $p(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)(x^2 - 4x - 1)$. Calculamos ahora las raíces del trinomio de segundo grado $x^2 - 4x - 1$, que resultan ser $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ y $\beta = 2 + \sqrt{5}$.

Ordenamos ahora todas las raíces de menor a mayor. Teniendo en cuenta que $2 < \sqrt{5} < 3$, resulta que $-2 < \alpha < 1 < 3 < \beta$. Tenemos que:

$$p(x) = (x + 2)(x - \alpha)(x - 1)(x - 3)(x - \beta)$$

Deducimos que:

$$\begin{array}{rcl}
x < -2 & \Longrightarrow & p(x) < 0 \text{ porque es producto de cinco números negativos.} \\
-2 < x < \alpha & \Longrightarrow & p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y cuatro negativos.} \\
\alpha < x < 1 & \Longrightarrow & p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y tres negativos.} \\
1 < x < 3 & \Longrightarrow & p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y dos negativos.} \\
3 < x < \beta & \Longrightarrow & p(x) < 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos y uno negativo.} \\
\beta < x & \Longrightarrow & p(x) > 0 \text{ porque es producto de cinco números positivos.}
\end{array}$$

Del estudio anterior se deduce que:

$$\{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\} =]-2, 2 - \sqrt{5}[\cup]1, 3[\cup]-2 + \sqrt{5}, +\infty[.$$

Naturalmente, si lo que se quiere es calcular para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $p(x) \geqslant 0$ basta añadir al resultado anterior los puntos en los que se anula $p(x)$.

Desigualdades entre funciones racionales. Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.

En estos ejercicios basta observar que la desigualdad $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ es equivalente a la desigualdad $p(x)q(x) > 0$, la cual ya sabemos resolver porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Ejemplo. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$h(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^3 + 1) > 0.$$

Las raíces de h son las soluciones de las ecuaciones

$$x^2 - 4x - 2 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son:

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{24}}{2} = 2 - \sqrt{6}, \qquad \beta = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}.$$

La segunda ecuación tiene una solución evidente, $x = -1$. Dividiendo por Ruffini resulta:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

El trinomio $x^2 - x + 1$ tiene discriminante negativo y coeficiente de x^2 positivo por lo que es siempre positivo, $x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$h(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1)(x^2 - x + 1) > 0 \Longleftrightarrow p(x) = (x + 1)(x - \alpha)(x - \beta) > 0.$$

Como $-1 < \alpha < \beta$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 &\implies p(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < \alpha &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
\alpha < x < \beta &\implies p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números negativos y uno positivo.}\\
\beta < x &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para valores de x en $]-1, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

En general, para resolver igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos se deben considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad $\left|x^2 - 6x + 8\right| = x - 2$.

Solución. La primera condición que debe cumplirse es que $x - 2 \geqslant 0$, esto es, $x \geqslant 2$. Para $x < 2$ la igualdad del enunciado no puede darse nunca. Supuesto que $x \geqslant 2$, la igualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las igualdades:

$$\text{a) } x^2 - 6x + 8 = x - 2, \qquad \text{b) } x^2 - 6x + 8 = -x + 2$$

La igualdad a) es $x^2 - 7x + 10 = 0$, cuyas soluciones son 2 y 5. La igualdad b) es $x^2 - 5x + 6 = 0$, cuyas soluciones son 2 y 3. Observa que todas las soluciones obtenidas son mayores o iguales que 2. Concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para $x = 2$, $x = 3$ y $x = 5$.

Ejemplo. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}$.

Solución. La desigualdad del enunciado equivale a que se verifique *alguna* de las desigualdades:

$$\text{a)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} > \frac{1}{2}, \qquad \text{b)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} < -\frac{1}{2}$$

La desigualdad a) es equivalente a:

$$\frac{x-2}{x^2-2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-3}{2(x^2-2x-1)} > 0 \Longleftrightarrow (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1) > 0$$

Como en esta última aparece el trinomio $-x^2+4x-3$ con coeficiente de x^2 negativo, para evitar posibles errores conviene cambiar de signo. Obtenemos así que la desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$p(x) = (x^2-4x+3)(x^2-2x-1) < 0$$

Calculando las raíces de los dos trinomios obtenemos que, *ordenadas de menor a mayor*, son $1-\sqrt{2} < 1 < 1+\sqrt{2} < 3$. Pongamos $\alpha = 1-\sqrt{2}$, $\beta = 1+\sqrt{2}$. Tenemos que:

$$p(x) = (x^2-4x+3)(x^2-2x-1) = (x-\alpha)(x-1)(x-\beta)(x-3)$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números negativos.}\\
\alpha < x < 1 &\implies p(x) < 0 \text{ porque es producto de un número positivo y tres negativos.}\\
1 < x < \beta &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de dos números negativos y dos positivos.}\\
\beta < x < 3 &\implies p(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y uno negativo.}\\
3 < x &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad a) se verifica para $x \in]1-\sqrt{2}, 1[\cup]1+\sqrt{2}, 3[$.

Análogamente se obtiene que la desigualdad b) se verifica para $x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[$.

Finalmente, la desigualdad del enunciado se verifica para

$$x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]1-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, 3[.$$

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad

$$|x^2+3x-9| = |x^2+x-6| + |2x-3|\,.$$

Solución. Poniendo $f(x) = x^2+x-6$ y $g(x) = 2x-3$, la igualdad del enunciado se escribe como $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$, igualdad que equivale a $f(x)g(x) \geqslant 0$, es decir $(x^2+x-6)(2x-3) \geqslant 0$. Calculando las raíces del trinomio tenemos que

$$(x^2+x-6)(2x-3) = 2(x+3)(x-2)(x-3/2).$$

Deducimos fácilmente que la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$ se verifica si $-3 \leqslant x \leqslant 3/2$, o si $x \geqslant 2$.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|-x + |x-1|| < 2$.

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a las dos desigualdades $-2 < -x + |x-1| < 2$, que son equivalentes a $x - 2 < |x-1| < x+2$. La segunda de estas desigualdades solamente puede darse si $x > -2$. Supongamos que $-2 < x \leqslant 1$. Entonces se tiene que $|x-1| = 1-x$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x-2 < 1-x < x+2$, que equivalen a $-3 < -2x < 1$, es decir, $-1 < 2x < 3$, o bien $-1/2 < x < 3/2$. No podemos olvidar que hemos usado que $x \leqslant 1$, por lo que la condición obtenida queda $-1/2 < x \leqslant 1$. Para $x > 1$ se tiene que $|x-1| = x-1$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x-2 < x-1 < x+2$, que se cumplen siempre. Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para $x > -1/2$.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.

$$|x+1| + |x^2 - 3x + 2| < 4.$$

Solución. Puesto que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, tenemos que

$$|x+1| + |x^2 - 3x + 2| = |x+1| + |(x-1)(x-2)| = |x+1| + |x-1||x-2|.$$

Para controlar los valores absolutos consideraremos por separado los casos $x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x < 2$ y $x > 2$.

- Para $x \leqslant -1$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = -x-1+(1-x)(2-x) = x^2 - 4x + 1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2 - 4x + 1 < 4$, es decir, $x^2 - 4x - 3 < 0$. Es fácil comprobar que para $x \leqslant -1$ se verifica que $x^2 - 4x - 3 > 0$. Por tanto, para $x \leqslant -1$ la desigualdad del enunciado es siempre falsa.

- Para $x \in]-1, 1]$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(1-x)(2-x) = x^2 - 2x + 3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2 - 2x + 3 < 4$, es decir, $x^2 - 2x - 1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1 - \sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2 - 2x - 1 < 0$ equivale a que $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida en el conjunto $]-1, 1] \cap]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[=]1-\sqrt{2}, 1]$.

- Para $1 < x < 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(x-1)(2-x) = -x^2 + 4x - 1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $-x^2 + 4x - 1 < 4$, es decir, $x^2 - 4x + 5 > 0$. Este trinomio no tiene raíces reales, por tanto se verifica que $x^2 - 4x + 5 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1 < x < 2$.

- Para $x \geqslant 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(x-1)(x-2) = x^2 - 2x + 3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2 - 2x + 3 < 4$, es decir, $x^2 - 2x - 1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1 - \sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2 - 2x - 1 < 0$ equivale a que $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Como $2 < 1 + \sqrt{2}$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida en el conjunto $[2, +\infty[\cap]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[= [2, 1+\sqrt{2}[$.

Concluimos que la desigualdad se verifica para

$$x \in]1-\sqrt{2}, 1] \cup]1, 2[\cup [2, 1+\sqrt{2}[=]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$$